Engenharias CTG UFPE
Vestibular 2011-2

Física e Matemática

LEIA COM ATENÇÃO

01. Só abra este caderno após ler todas as instruções e quando for autorizado pelos fiscais da sala.

02. Preencha os dados pessoais.

03. Este caderno contém as provas de FÍSICA e MATEMÁTICA, cada uma com 16 (dezesseis) questões, numeradas de 01 a 16, que podem ser de proposições múltiplas e/ou de respostas numéricas. Se não estiver completo, exija outro do fiscal da sala.

04. As questões de proposições múltiplas apresentam 5(cinco) alternativas numeradas de duplo zero (0-0) a duplo quatro (4-4), podendo ser todas verdadeiras, todas falsas ou algumas verdadeiras e outras falsas. Na folha de respostas, as verdadeiras devem ser marcadas na coluna **V**, as falsas, na coluna **F**. Caso não desejar responder algum item marque a coluna **NR**.

05. As questões numéricas apresentam respostas cujos valores variam de 00 a 99 que devem ser marcados, na folha de respostas, no local correspondente ao número da questão. (COLUNA D para as dezenas e COLUNA U para as unidades. Respostas com valores entre 0 e 9 devem ser marcadas antepondo-se zero (0) ao valor, na COLUNA D).

06. Ao receber a folha de respostas, confira o nome da prova, o seu nome e número de inscrição. Qualquer irregularidade observada comunique imediatamente ao fiscal.

07. Assinale a resposta de cada questão no corpo da prova e, só depois, transfira os resultados para a folha de respostas.

08. Para marcar a folha de respostas, utilize apenas caneta esferográfica preta e faça as marcas de acordo com o modelo (▬). **A marcação da folha de respostas é definitiva, não admitindo rasuras**.

09. Não risque, não amasse, não dobre e não suje a folha de respostas, pois isto poderá prejudicá-lo.

10. Os fiscais não estão autorizados a emitir opinião nem a prestar esclarecimentos sobre o conteúdo das provas. Cabe única e exclusivamente ao candidato interpretar e decidir.

11. Se a Comissão verificar que a resposta de uma questão é dúbia ou inexistente, a questão será posteriormente anulada, e os pontos a ela correspondentes, distribuídos entre as demais.

Nome: **Inscrição:**

Identidade: **Órgão Expedidor:**

Assinatura:

COMISSÃO DE PROCESSOS
SELETIVOS E TREINAMENTOS
(0xx81) 3412 0800
(0xx81)3412 0805

COVEST
COPSET

FÍSICA

Dados:

Aceleração da gravidade: **10 m/s^2**
Densidade da água: **10^3 kg/m^3**
Velocidade da luz no vácuo: **3 × 10^8 m/s**

	30º	**37º**	**45º**
sen	0,50	0,60	0,71
cos	0,86	0,80	0,71

01. Uma estrela de nêutrons tem massa igual a quatro vezes a massa do Sol e volume esférico de raio ***20 km***. Considere a massa do Sol igual a $\boldsymbol{2 \times 10^{30}}$ ***kg*** e as densidades da estrela de nêutrons e da água denotadas, respectivamente, por ρ_{est} e $\rho_{água}$. Se a ordem de grandeza da razão $\rho_{est}/\rho_{água}$ é $\boldsymbol{10^N}$, qual o valor de ***N***?

> **Resposta**: **14**
>
> **Justificativa:** A densidade da estrela de nêutrons é dada por ρ_{est} = M/V = $4(2 \times 10^{30}\ kg)/[4\pi(2 \times 10^4\ m)^3/3] \cong 2,4 \times 10^{17}\ kg/m^3$. Assim, a ordem de grandeza da razão $\rho_{est}/\rho_{água}$ é 10^{14}.

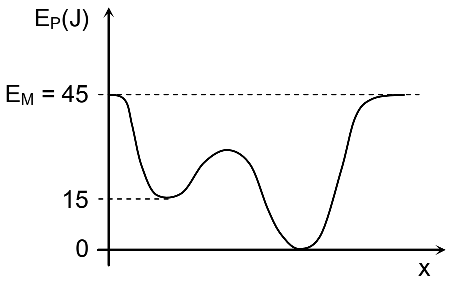
02. Uma partícula é liberada em queda livre a partir do repouso. Calcule o módulo da velocidade média da partícula, em ***m/s***, após ela ter caído por ***320 m***.

> **Resposta**: **40**
>
> **Justificativa:** No MUV a velocidade média é a média aritmética das velocidades inicial e final. A velocidade final é $v^2 = 2g(\Delta h) = 2 \times 10 \times 320 = 6400 \rightarrow v = 80$ m/s. Assim, $v_m = (80+0)/2 = 40$ m/s.

03. Para medir o coeficiente de atrito cinético, $\boldsymbol{\mu_C}$, entre um bloco e uma superfície plana, um impulso inicial é dado ao bloco, que se desloca em linha reta sobre a superfície até parar. O bloco percorre ***80 cm*** desde o instante em que a sua velocidade tem módulo igual a ***2 m/s*** até o instante em que para. Expressando o coeficiente de atrito cinético na forma $\boldsymbol{\mu_C = A \times 10^{-2}}$, qual o valor de ***A***?

> **Resposta**: **25**
>
> **Justificativa:** Pela 2ª lei de Newton, $-F_{at} = Ma$, onde $F_{at} = \mu N = \mu Mg$. Assim, $a = -\mu g$. Pela equação de Torricelli, $v^2 = v_0^2 + 2aL$. Substituindo v = 0, obtemos $\mu = v_0^2/(2gL) = 0,25 = 25 \times 10^{-2}$.

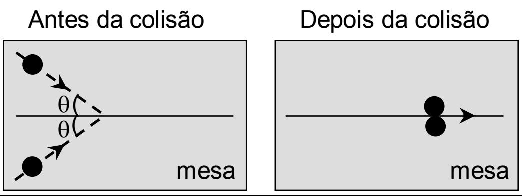
04. O gráfico seguinte mostra como a energia potencial de uma partícula varia com a sua posição. O valor da energia mecânica da partícula, $\boldsymbol{E_M}$, também aparece no gráfico. A partícula de massa ***0,1 kg*** se move em linha reta. Todas as forças que atuam na partícula são conservativas. Obtenha a velocidade máxima da partícula, em ***m/s***.



Resposta: **30**

Justificativa: A energia mecânica é a soma da energia cinética com a energia potencial, $E_m = E_c + E_p$. Logo, a energia cinética máxima ocorre na posição onde a energia potencial é mínima, $(E_c)_{max} = E_m - E_p = 45$ J $= mv^2/2$. Assim, v = 30 m/s.

05. Duas partículas idênticas, que se movem sobre a superfície **horizontal** de uma mesa sem atrito, realizam uma colisão perfeitamente inelástica, como mostra a figura. Antes da colisão, cada partícula tinha velocidade de módulo ***5 m/s*** e direção ***θ = 37º*** em relação à linha contínua da figura. Qual a velocidade das partículas após a colisão, em ***m/s***?



Resposta: **04**

Justificativa: Há a conservação da quantidade de movimento (momento linear) total das partículas. No caso de colisão perfeitamente inelástica, ao longo da direção da linha contínua da figura, escrevemos: $2Mv_f = Mv\cos\theta + Mv\cos\theta$, ou seja, $v_f = v\cos\theta = 5 \times 0{,}8 = 4$ m/s.

06. Um barco de passageiros afundou em um lago. É preciso içá-lo utilizando boias especiais. A massa do barco é ***8000 kg*** e o volume ocupado por ele é ***3 m³***. Despreze o peso das boias. Determine o volume mínimo, em ***m³***, que devem ter as boias para que o barco fique na iminência de ser elevado do fundo do lago.

Resposta: **05**

Justificativa: O barco e as boias estão sujeitos às forças peso e empuxo. Aplicando a 2ª lei de Newton na iminência de movimento tem-se, $E_{boia} + E_{barco} - P_{barco} = 0$. Logo, $\rho_{água}V_{boia}g + \rho_{água}V_{barco}g - M_{barco}g = 0 \rightarrow V_{boia} = 5$ m^3.

07. Descobre-se que uma estrela de massa igual a quatro vezes a massa do Sol, localizada na Via Láctea, possui um planeta orbitando ao seu redor, em movimento circular uniforme (MCU) de raio ***R***. O tempo necessário para que esse exoplaneta percorra uma circunferência completa ao redor da estrela é a metade de um ano terrestre. Considere que a Terra realiza um MCU ao redor do Sol de raio $\boldsymbol{R_{TS}}$ e despreze a influência gravitacional de outros corpos do sistema solar. Quanto vale a razão $\boldsymbol{R/R_{TS}}$?

Resposta: **01**

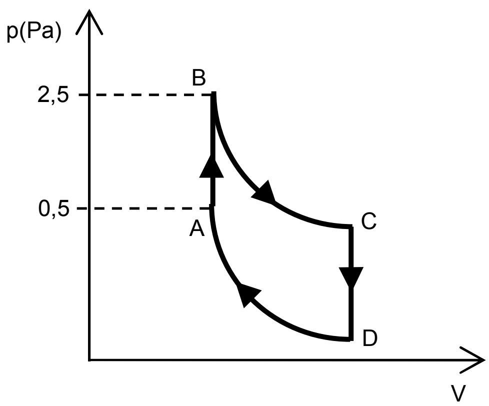
Justificativa: A 2ª lei de Newton para o exoplaneta sob a ação da força gravitacional da estrela é dada por $GM_EM_P/R^2 = M_Pv^2/R$. Escrevendo $v = 2\pi R/T_P$, obtemos $R^3 = GM_ET_P^2/(4\pi^2)$. O mesmo cálculo realizado para o sistema Terra – Sol leva a $R_{TS}^3 = GM_ST^2/(4\pi^2)$. Dividindo uma equação pela outra, obtemos $(R/R_{TS})^3 = (M_E/M_S)(T_P/T)^2$. Substituindo $M_E = 4M_S$ e $T_P = T/2$, encontramos $R/R_{TS} = 1$.

08. Um estudante precisa de três litros de água à temperatura de ***37 °C***. Ele já dispõe de dois litros de água a ***17 °C***. A que temperatura, em **°C**, ele deve aquecer o litro de água a ser misturado com o volume já disponível? Considere a existência de trocas térmicas apenas entre os volumes de água na mistura.

Resposta: **77**

Justificativa: Considerando que haja trocas térmicas apenas entre os volumes de água misturados, as trocas de calor são descritas pela equação $M_1c(T_f - T_1) + M_2c(T_f - T_2) = 0$. Como a densidade da água é $\rho = M/V$, então, $T_2 = V_1(T_f - T_1)/V_2 + T_f$. Substituindo os valores, obtemos $T_2 = 77\ ^oC$.

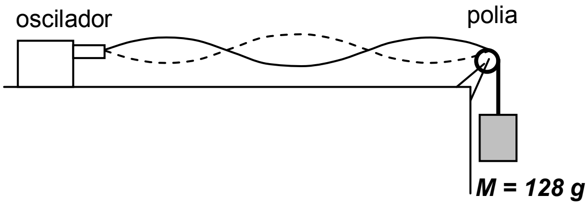
09. Um gás ideal se transforma de acordo com o ciclo termodinâmico mostrado abaixo no diagrama pressão versus volume. Os processos ***AB*** e ***CD*** são isovolumétricos, e os processos ***BC*** e ***DA*** são isotérmicos. Qual a razão $\boldsymbol{T_C/T_D}$ entre as respectivas temperaturas absolutas do gás nos pontos ***C*** e ***D***?



Resposta: **05**

Justificativa: Segundo a lei dos gases ideais, ao longo da isovolumétrica AB, temos que $p_A/T_A = p_B/T_B$. Se os processos BC e CD são isotérmicos, então, $T_C = T_B$ e $T_D = T_A$, de modo que $T_C/T_D = p_B/p_A = 5$.

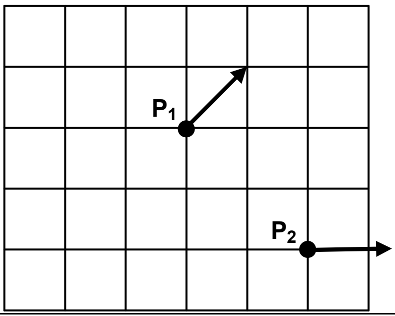
10. A figura mostra uma montagem onde um oscilador gera uma onda estacionária que se forma em um fio. A massa de um pedaço de ***100 m*** deste fio é ***20 g***. Qual a velocidade de propagação das ondas que formam a onda estacionária, em ***m/s***?



Resposta: **80**

Justificativa: A velocidade de uma onda mecânica se propagando em um fio é dada por $v = (T/\mu)^{1/2}$, onde T é a tração sobre o fio e μ é a densidade linear do fio. Assim, T = 0,128 × 10 = 1,28 N e μ = 0,02/100 = 2 × 10^{-4} kg/m, de modo que v = 80 m/s.

11. Uma carga elétrica **puntiforme** gera campo elétrico nos pontos P_1 e P_2. A figura a seguir mostra setas que indicam a direção e o sentido do vetor campo elétrico, nestes pontos. Contudo, os comprimentos das setas não indicam os módulos destes vetores. O módulo do campo elétrico no ponto P_1 é ***32 V/m***. Calcule o módulo do campo elétrico no ponto P_2, em ***V/m***.



Resposta: **16**

Justificativa: Visto que a carga é puntiforme, a posição da carga é determinada pelo cruzamento das direções das setas. A carga se encontra no vértice superior direito do quadrado (de lado L) no canto inferior esquerdo da figura. O módulo campo gerado no ponto P_1 é

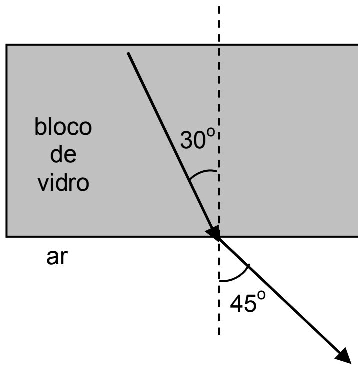
$E_1 = kQ/(2\sqrt{2}L)^2 = 32 \rightarrow kQ/L^2 = 256$. O campo elétrico $E_2 = kQ/(4L)^2 = 256/16 = 16$.

12. Uma pequena lanterna utiliza uma pilha do tipo AA. A pilha tem resistência interna ***r = 0,25 Ω*** e fornece uma força eletromotriz de ***ε = 1,5 V***. Calcule a energia dissipada pela lâmpada, de resistência elétrica ***R = 0,5 Ω***, quando esta é ligada durante ***Δt = 30 s***. Obtenha o resultado em ***J***.

Resposta: **60**

Justificativa: A corrente da lâmpada é dada pela lei de Ohm, tem-se que $\varepsilon = (r + R)I \rightarrow I = 1{,}5/(0{,}25+0{,}5) = 2$ A. A potência da lâmpada é $P = RI^2 = 0{,}5 \times 2^2 = 2$ W. A energia química da pilha transformada em luz e calor é $E = P(\Delta t) = 60$ J.

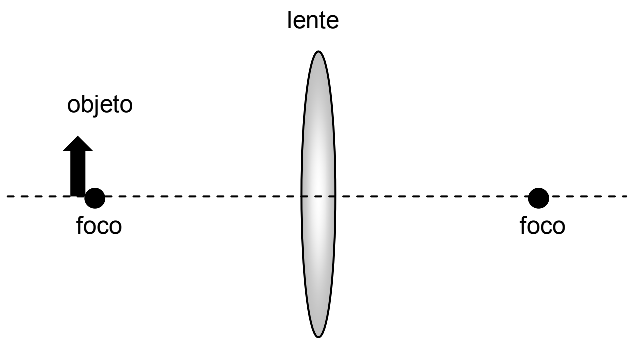
13. A figura apresenta um experimento com um raio de luz que passa de um bloco de vidro para o ar. Considere a velocidade da luz no ar como sendo igual à velocidade da luz no vácuo. Qual é a velocidade da luz dentro do bloco de vidro, em unidades de $\boldsymbol{10^8 m/s}$?



Resposta: **02**

Justificativa: Usando a lei de Snell, $n_1 sen(30º) = n_2 sen(45º) \rightarrow 0{,}5 = (v/c)0{,}71 \rightarrow v = 0{,}5c/0{,}71 = 2{,}11 \times 10^8$ m/s.

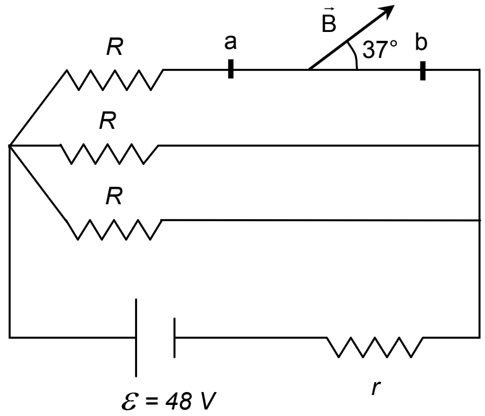
14. A figura mostra uma montagem onde um objeto foi colocado sobre o eixo ótico distando ***4,2 cm*** de uma lente convergente de distância focal ***f = 4 cm***. Calcule o fator de ampliação, em módulo, para a montagem descrita.



Resposta: **20**

Justificativa: Usando a expressão que relaciona a distância focal com a distância do objeto e a da imagem tem-se, $1/f = 1/o + 1/i \rightarrow i = 84$ cm. O módulo da ampliação é $A = i/o = 20$.

15. O circuito elétrico plano, mostrado a seguir, possui uma bateria de força eletromotriz ***$\mathcal{E}$ = 48 V*** e resistência interna ***r = 1 Ω*** ligada a resistores de resistências ***R = 9 Ω*** e ***r = 1 Ω*** O trecho retilíneo ***ab*** do circuito possui comprimento de ***50 cm***. No plano do circuito, existe um campo magnético uniforme, de módulo **B = *2,5 T*** e direção fazendo um ângulo de ***37º*** com a direção do trecho ***ab***. Qual o módulo da força magnética que age no trecho ***ab***, em ***N***?



Resposta: **03** **Justificativa:** A corrente elétrica constante no circuito é dada por $i = \varepsilon/R_{eq}$, onde a resistência equivalente é $R_{eq} = R/3 + r = 4\ \Omega$. Assim, i = 12 A. A corrente que percorre o trecho *ab* é, portanto, 4 A. A força devido a um campo magnético de módulo B em um trecho retilíneo de comprimento L de um fio atravessado por uma corrente elétrica i constante possui módulo $F = iLB\text{sen}\theta$, onde θ é o ângulo entre o trecho do fio e o vetor campo magnético. Nesse caso, substituindo os dados fornecidos na expressão da força, obtemos F = (4 A)(0,5 m)(2,5 T)sen(37^{o}) = 3 N.

16. Sobre os modelos atômicos de Thomson, Rutherford e Bohr, podemos fazer as seguintes afirmações.

0-0) A partir do resultado do espalhamento de partículas α por folhas metálicas finas, Rutherford concluiu que a densidade de carga positiva do modelo atômico de Thomson era muito maior que a real.
1-1) A estabilidade do átomo de Bohr era garantida por um postulado, pois, de acordo com a física clássica, um elétron em movimento circular teria perdas de energia por irradiação devido à sua aceleração centrípeta.
2-2) De acordo com o modelo de Rutherford, os elétrons se distribuem em órbitas quantizadas na região ao redor do núcleo denominada eletrosfera.
3-3) A razão entre as energias quantizadas de duas órbitas no modelo atômico de Bohr para o átomo de hidrogênio é igual à razão entre os números quânticos associados a estas órbitas.
4-4) No modelo atômico de Bohr para o átomo de hidrogênio, o produto da velocidade do elétron pelo raio da órbita é quantizado.

Resposta: **FVFFV**

Justificativa:

0-0) FALSA, pois, a partir do resultado do espalhamento de partículas α por finas folhas metálicas, Rutherford concluiu que a densidade de carga positiva do modelo atômico de Thomson era muito menor que a real, criando, assim, o conceito de núcleo atômico.

1-1) VERDADEIRA, pois, de fato, elétrons acelerados irradiam energia, de acordo com a física clássica, devendo espiralar até o núcleo. Bohr "resolveu" a questão da estabilidade atômica por meio de um postulado.

2-2) FALSA, pois Rutherford não considerou a quantização das órbitas eletrônicas em seu modelo.

3-3) FALSA, pois a razão entre as energias quantizadas de duas órbitas no modelo atômico de Bohr para o átomo de hidrogênio é igual ao inverso do quadrado da razão entre os números quânticos associados a estas órbitas.

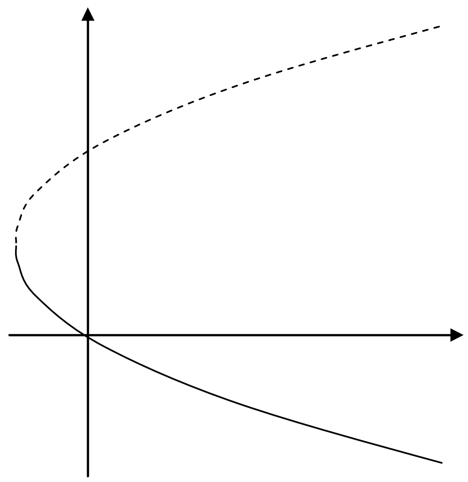
4-4) VERDADEIRA, pois Bohr considerou, em seu modelo, que o momento angular do elétron em uma órbita circular é quantizado, sendo este proporcional ao produto da velocidade do elétron pelo raio da sua órbita.

MATEMÁTICA

01. A curva da figura abaixo representa parte do conjunto dos pontos (x, y) que satisfazem a equação

$$\mathbf{y^2 - 4y - 4x = 0.}$$

Com base nesses dados, analise as afirmações seguintes.



0-0) Para cada y real, existe um real x tal que (x,y) está na curva.

1-1) A curva é o gráfico da função $y = 2 \pm 2\sqrt{x+1}$, com domínio os reais ≥ -1.

2-2) A parte da curva em traço pontilhado ilustra o gráfico da função $y = 2 + 2\sqrt{x+1}$, com domínio os reais ≥ -1.

3-3) A parte da curva em traço contínuo ilustra o gráfico da função $y = 2 - 2\sqrt{x+1}$, com domínio os reais ≥ -1.

4-4) Não é possível expressar x como função de y.

Resposta: VFVVF

Justificativa:

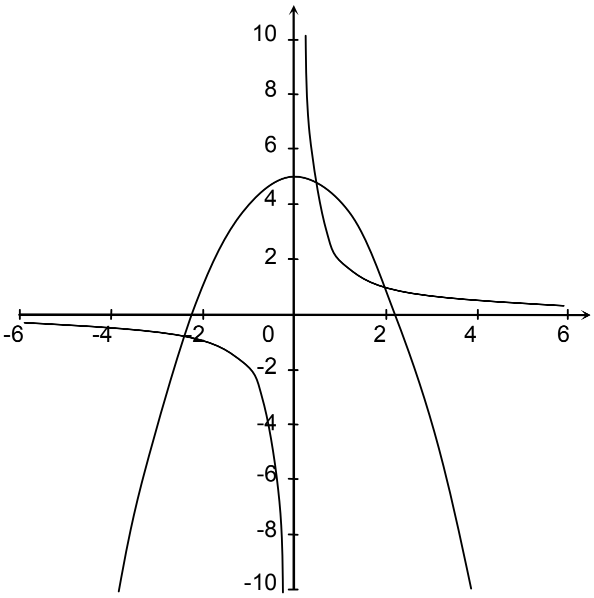
Completando quadrados, obtemos

$y^2 - 4y + 4 = 4x + 4$ ou $(y - 2)^2 = 4 (x + 1)$.

Portanto $y = 2 \pm 2\sqrt{x+1}$, que são duas funções de x.

02. Na ilustração a seguir, temos parte dos gráficos das funções $f : IR \to IR$ dada por $f(x) = 5 - x^2$ e $g : IR - \{ 0 \} \to IR$ dada por $g(x) = 2/x$.

Analise as afirmações a seguir referentes às duas funções.



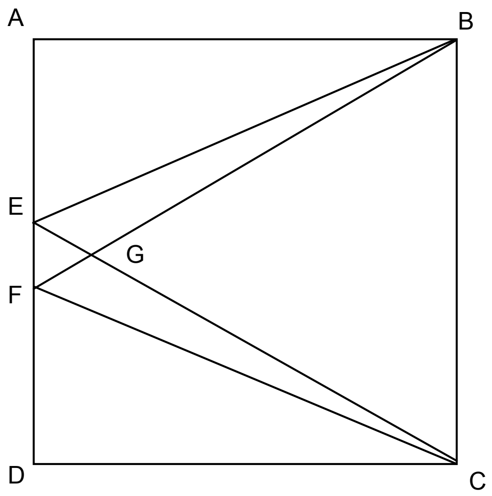
0-0) Um dos pontos de interseção dos gráficos de f e g é (2, 1).
1-1) As abscissas dos pontos de interseção dos gráficos de f e g são as raízes reais da equação $x^3 - 5x + 2 = 0$.
2-2) $f(x) - g(x) = (x - 2)(x^2 + 2x - 1)/x$, para todo x real e diferente de zero.
3-3) O ponto de interseção dos gráficos de f e g situado no terceiro quadrante tem ordenada $2(1 - \sqrt{2}\,)$.
4-4) Os gráficos de f e g se interceptam em quatro pontos.

Resposta: VVFVF

Justificativa:

Substituindo x = 2 nas duas funções obtemos f(2) = 1 e g(2) = 1; logo, o ponto (2, 1) está no gráfico das duas funções. Temos f(x) = g(x) se e somente se $5 - x^2 = 2/x$ que é equivalente a $x^3 - 5x + 2 = 0$. Do cálculo anterior, temos que $f(x) - g(x) = (-x^3 + 5x - 2)/x = - (x - 2)(x^2 + 2x - 1)/2$, dividindo $x^3 - 5x + 2$ por $(x - 2)$. As abscissas dos pontos de interseção dos gráficos de f e g são as raízes de $(x - 2)(x^2 + 2x - 1) = 0$ que são x = 2 e $x = (-2 \pm 2\sqrt{2}\,)/2 = -1 \pm \sqrt{2}$ e $g(-1 - \sqrt{2}\,) = 2/(-1 - \sqrt{2}\,) = -2(-1 + \sqrt{2}\,) = 2(1 - \sqrt{2}\,)$.

03. Na figura abaixo ABCD é um quadrado de lado 1, e BCG é um triângulo equilátero.



0-0) O ângulo DEC mede 45º

1-1) O segmento ED mede $\frac{\sqrt{3}}{3}$

2-2) A tangente do ângulo AEB é $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$

3-3) O triângulo EBC é isósceles

4-4) O segmento EB mede $\frac{1+2\sqrt{3}}{3}$

Resposta: FVVFF
Justificativa:
ECB = CED = 60^o, ECD = 30^o e tg 30^o = ED/DC = $1/\sqrt{3}$
Então ED = $1/\sqrt{3}$ e AE = $1 - 1/\sqrt{3}$. Portanto, a tangente do ângulo AEB é
$(3 + \sqrt{3})/2$. O ângulo EBC é maior que 60º e o ângulo BEC é menor que 60º.

Temos: $EB^2 = 1^2 + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = 1 + 1 - \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} = \frac{7-2\sqrt{3}}{3}$ e EB $\sqrt{\frac{7-2\sqrt{3}}{3}}$.

04. Se o número complexo 3 + 2i é raiz da equação $x^3 - 23x + c$, com c sendo uma constante real, qual o valor de c?

Resposta: 78

Justificativa:

3 + 2i é raiz da equação $x^2 - 6x + 13$ e, dividindo $x^3 - 23x + c$ por este polinômio obtemos quociente x + 6 e resto c – 78. Para o resto ser zero devemos tomar c = 78.

05. Diferentes quantidades de fertilizantes são aplicadas em plantações de cereais com o mesmo número de plantas, e é medido o peso do cereal colhido em cada plantação. Se x kg de fertilizantes são aplicados em uma plantação onde foram colhidas y toneladas (denotadas por t) de cereais, então, admita que estes valores estejam relacionados por $y = k.\,x^r$, com k e r constantes. Se, para x = 1 kg, temos y = 0,2 t e, para x = 32 kg, temos y = 0,8 t, encontre o valor de x, em kg, quando y = 1,8 t e assinale a soma dos seus dígitos.

Resposta: 09

Justificativa:

Substituindo x = 1 e y = 0,2 em $y = kx^r$, obtemos 0,2 = k.1 e k = 0,2. Substituindo x = 32 e y = 0,8 obtemos $0{,}8 = 0{,}2.32^r$ que é equivalente a 2^2 =

2^{5r} e segue que $r = 2/5=0,4$. Portanto, $y = 0,2.x^{0,4}$. Substituindo $y = 1,8$ obtemos $1,8 = 0,2.x^{0,4}$ e $x = 9^{1/0,4} = 3^5 = 243$ kg.

06. A população de peixes de um lago é atacada por uma doença e deixa de se reproduzir. A cada semana, 20% da população morre. Se inicialmente havia 400.000 peixes no lago e, ao final da décima semana, restavam x peixes, assinale 10log x. Dado: use a aproximação $\log 2 \approx 0,3$.

Resposta: **46**

Justificativa:

A população de peixes no lago após n semanas é $P(n) = 400000(0,8)^n$. $x = P(10) = 4.10^5.(0,8)^{10} = 4.10^5.8^{10}/10^{10} = 4.8^{10}.10^{-5}$ logo $\log x = \log 4 + 10\log 8 - 5\log 10 \approx 2.0,3 + 30.0,3 - 5 = 32.0,3 - 5 = 9,6 - 5 = 4,6$.

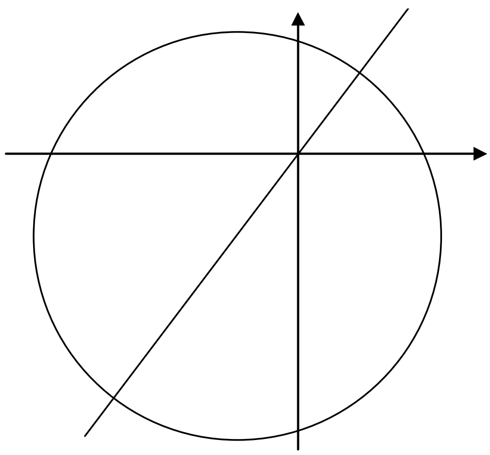
07. Em um grupo de cinco torcedores, três torcem pelo time A, e dois torcem pelo time B. Escolhendo aleatoriamente três torcedores do grupo, qual a probabilidade percentual de serem selecionados os dois torcedores do time B?

Resposta: 30

Justificativa:

O número de maneiras de escolher três dentre os cinco torcedores é $C_5^3 = 5.4/2 = 10$. O número de maneiras de escolher três torcedores dos quais dois são os que torcem pelo time B é três. A probabilidade procurada é 3/10 = 30%.

08. Na ilustração a seguir, temos a circunferência com equação $x^2 + y^2 + 6x + 8y = 75$ e a reta passando pela origem e pelo centro da circunferência. Determine o ponto da circunferência mais distante da origem e indique esta distância.



Resposta: 15

Justificativa:

A equação da circunferência também pode se escrever na forma $(x + 3)^2 + (y$

$+ 4)^2 = 10^2$, e a circunferência tem centro no ponto (-3, -4) e raio 10. A reta passando pela origem e pelo centro da circunferência tem equação y = -4x/(-3) = 4x/3. Os pontos da circunferência mais próximo e mais distante da origem são as interseções da circunferência com a reta passando pela origem e pelo centro da circunferência. Substituindo y = 4x/3 na equação da circunferência, obtemos $(x + 3)^2 + (4x/3 + 4)^2 = 100$ que se simplifica como $(x + 3)^2 + 16(x + 3)^2/9 = 100$ e também como $(x + 3)^2 = 36$ e x = ±6 – 3 = 3, -9. Os pontos de interseção são (3, 4) e (-9, -12). O ponto mais distante da origem é (-9, -12), e a distância é $\sqrt{9^2+12^2} = 15$.

09. Nos anos de 2008, 2009 e 2010, um trabalhador recebeu um total de rendimentos de R$ 66.200,00. Se a renda do trabalhador, em 2010, foi 10% superior à renda de 2009, e a renda em 2009 foi 10% superior à renda de 2008, calcule o total de rendimentos do trabalhador em 2010 e indique a soma de seus dígitos.

Resposta: **08**

Justificativa:

Se x é a renda do trabalhador em 2010, então, a sua renda, em 2009, foi de x/1,1 e, em 2008, foi de $x/1,1^2$. Segue que x + x/1,1 + x/1,21 = 66200 e x.3,31 = 1,21.66200 e x = 1,21.20000 = 24200 reais.

10. Sabendo que $\frac{x^2-2x+4}{x^3+x^2-2x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-1}$, assinale A + B + 2C.

Resposta: 02

Justificativa:

Temos

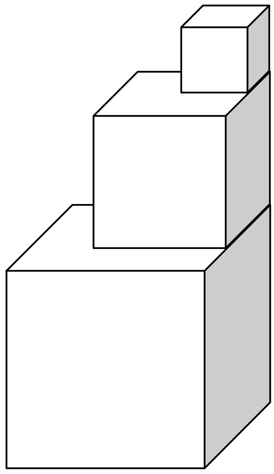
$$\frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-1} = \frac{A(x^2+x-2)+B(x^2-x)+C(x^2+2x)}{x(x^2+x-2)}$$

$$= \frac{x^2-2x+4}{x^3+x^2-2x}$$

Igualando os numeradores, temos A + B + C =1, A – B + 2C = -2 e -2A = 4. Portanto, A = -2, 2A + 3C = -1, C = 1 e B = 2. Logo, A + B + 2C = -2 + 2 + 2 = 2.

11. Considere três cubos, com arestas medindo 1 cm, 2 cm e 3 cm. Os cubos serão colados ao longo de suas faces de modo a se obter um sólido. Pretende-se saber quais os sólidos com menor área total da superfície.

Por exemplo, se a colagem é feita como na ilustração a seguir temos um sólido com área da superfície $6(1 + 4 + 9) - (8 + 2) = 74$ cm^2.

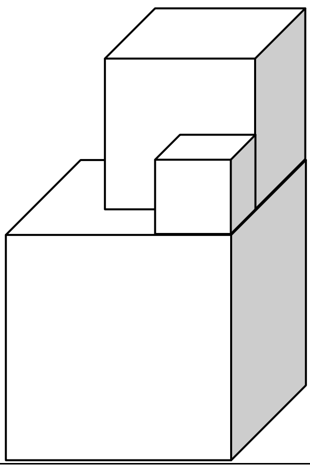


Dentre os sólidos obtidos, colando os três cubos ao longo de suas faces, existem alguns com menor área total da superfície. Indique o valor desta área em cm^2.

Resposta: 72

Justificativa:

As somas das áreas das superfícies dos três cubos é $6(1 + 4 + 9) = 84$ cm^2. A maior área de contato dos dois cubos maiores é 4 cm^2, o que diminui a área do sólido em $2.4 = 8$ cm^2. A maior área de contato do cubo menor com o sólido já construído é obtida quando o menor tem uma face de contato com cada um dos dois cubos maiores, o que diminui a área do sólido agora construído em $2.2 = 4$ cm^2. A menor área de superfície possível é $84 - 8 - 4 = 72$ cm^2 e um dos sólidos possíveis está ilustrado a seguir.



12. Uma locadora de vídeos tem três estilos de filmes: de ficção científica, dramáticos e comédias. Sabendo que:

- o total de filmes de ficção científica e dramáticos, adicionado de um quarto dos filmes de comédia, corresponde à metade do total de filmes da locadora;

- o número de filmes de comédia excede em 800 o total de filmes de ficção científica e dramáticos;

- o número de filmes dramáticos é 50% superior ao número de filmes de ficção científica.

Encontre o número de filmes dramáticos da locadora e indique a soma de seus dígitos.

Resposta: 12

Justificativa:

Sejam x, y e z os números respectivos de filmes de ficção, dramáticos e de comédias. Da primeira condição, temos $x + y + z/4 = (x + y + z)/2$ que se simplifica como $x + y – z/2 = 0$. A segunda condição se traduz como $z = 800 + x + y$ ou $x + y – z = -800$. A terceira condição se escreve simbolicamente como $y = 1,5x$. Subtraindo as duas primeiras igualdades obtemos $z/ 2 = 800$ e $z = 1600$. Substituindo z na primeira equação, obtemos $x + y = 800$. Substituindo nesta equação $y = 1,5x$ obtemos $2,5x = 800$ e $x = 320$, $y = 480$.

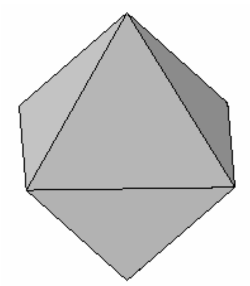
13. Qual o menor inteiro positivo que deixa resto 2, quando dividido por 3; resto 3, quando dividido por 5, e resto 5, quando dividido por 7?

Resposta: 68

Justificativa:

Os naturais que deixam resto 2 quando divididos por 3 são 2, 5, 8, 13, ... e 8 também deixa resto 3 quando dividido por 5. Os naturais que deixam resto 2, quando divididos por 3, e resto 3, quando divididos por 5 são 8, 23, 38, 53, 68, .. e 68 também deixa resto 5 quando dividido por 7.

14. Na ilustração a seguir, temos um octaedro regular com área total da superfície $36\sqrt{3}$ cm^2. Indique o volume do octaedro, em cm^3.



Resposta: 36

Justificativa:

Se a aresta do octaedro mede a cm, então, a área de sua superfície é $8.a^2\sqrt{3}/4 = 2a^2\sqrt{3} = 36\sqrt{3}$ e

$a = 3\sqrt{2}$ cm. A altura de uma das pirâmides quadradas que formam metade do octaedro mede $\sqrt{(a\sqrt{3}/2)^2 - (a/2)^2} = a/\sqrt{2}$ cm, e o volume do octaedro será $2.a^2.(a/\sqrt{2})/3 = a^3\sqrt{2}/3 = 27.2\sqrt{2}.\sqrt{2}/3 = 36$ cm^3.

15. Os alunos de uma turma cursam alguma(s) dentre as disciplinas Matemática, Física e Química. Sabendo que:

- o número de alunos que cursam Matemática e Física excede em 5 o número de alunos que cursam as três disciplinas;

- existem 7 alunos que cursam Matemática e Química, mas não cursam Física;
- existem 6 alunos que cursam Física e Química, mas não cursam Matemática;
- o número de alunos que cursam exatamente uma das disciplinas é 150;
- o número de alunos que cursam pelo menos uma das três disciplinas é 190.

Quantos alunos cursam as três disciplinas?

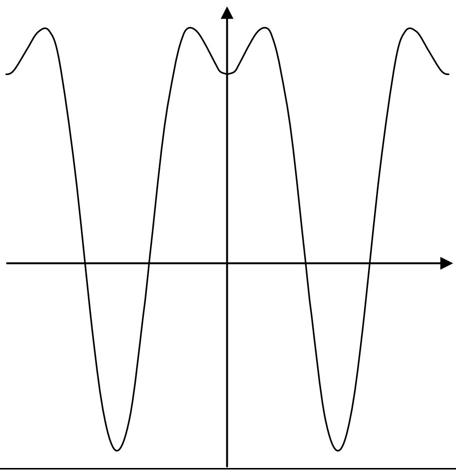
Resposta: 22

Justificativa:

O número de alunos que cursam exatamente uma disciplina é 150; o número de alunos que cursam exatamente duas disciplinas é 5 + 7 + 6 = 18. O número de alunos que cursam as três disciplinas é 190 – 18 – 150 = 22.

16. Quantas soluções a equação trigonométrica $\text{sen}^2 x + \cos x = 5/4$ admite no intervalo $[0, 60\pi]$?

Parte do gráfico da função $\text{sen}^2 x + \cos x$ está esboçada abaixo.



Resposta: 60

Justificativa:

Substituindo $\text{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$ na equação obtemos $\cos^2 x - \cos x + ¼ = 0$ que tem a raiz dupla $\cos x = ½$. A igualdade anterior tem as soluções $x = \pm\pi/3 + 2k\pi$. Em cada ciclo completo, a equação admite duas soluções; logo, no intervalo $[0, 60\pi]$, admite 30.2 = 60 soluções.